

基于极限分析的圆形浅基础地基承载力上限解

张国祥, 付江山

(中南大学 土木建筑学院, 长沙 410075)

摘要: 地基承载力问题是岩土工程领域最重要的研究课题之一。针对圆形浅基础地基, 从空间问题着手, 根据极限分析上限分析理论, 选择合适的地基破坏模式及机动位移速度场, 首次考虑了单元土体所受的侧向土压力对地基极限承载力的影响, 同时考虑到土体自重及地面超载等因素的作用, 推导出理论上更为合理的三维圆形浅基础地基极限承载力上限解。结合工程实例, 用相应 Matlab 计算程序计算出上限解, 并与实测值进行了对比, 证明了其方法的合理性与实用性。

关键词: 地基; 破坏模式; 速度场; 极限分析; 上限定理; 能量消散率

中图分类号: TU 470

文献标识码: A

Upper bound solution for bearing capacity of circular shallow foundation based on limit analysis

ZHANG Guo-xiang, FU Jiang-shan

(School of Civil and Architectural Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: Foundation bearing capacity is one of the most important research topics in the field of geotechnical engineering. Focusing on circular shallow foundation, and starting from spatial problem, and according to the theory of limit analysis, a more reasonable upper bound solution for the ultimate bearing capacity of the three-dimensional circular shallow foundation is presented theoretically. This thesis chooses a suitable foundation failure mode and motor displacement velocity field, and firstly considers the influence of the lateral soil pressure on the limit bearing capacity of circular shallow foundation and the effects of soil weight under the base of the foundation and surcharge load. Combined with the project, the upper bound solutions are calculated using corresponding Matlab program and compared with the serve value in other techniques. The upper bound solution is proved to be more rational and practical.

Key words: foundation; failure mode; velocity field; limit analysis; upper bound theorem; rates of energy dissipation

1 引言

地基承载力问题是岩土工程领域研究的热点问题之一, 目前求解地基承载力的方法可以分为以下4类^[1-2]: 极限平衡法、滑移线法、极限分析法、数值分析有限元法。基于极限平衡法 Terzaghi^[3]、Meyerhof^[4]、Sarma 和 Iossifelis^[5]相继给出了地基承载力的近似计算公式, 这种传统的方法是把稳定问题简化为静力学问题, 它既没有考虑材料的应力-应变, 也没有考虑流动法则, 需要对破裂面上的应力分布作大量假设才能得到完整的平衡方程, 而且破裂面内外所有的点不是均满足平衡方程^[6]。Sokolovskii、Hansen 及 Boltin^[7-8]利用应力平衡及屈服条件得到了滑移线的极限平衡微分方程, 但只能

针对二维问题 and 无重土才能给出精解。近几年, 有限元法被广泛用来求解地基承载力问题, 这种方法的优点就是很容易模拟复杂的层状地基、土体参数及荷载、应力边界条件。Griffiths、Burd^[9]运用有限元法给出了相应的数值解, 但这种方法在计算过程中需要考虑复杂的应力-应变关系, 而应力-应变关系受多种因素影响, 且对与岩土材料来说非常复杂。文献[10-12]在地基极限承载力方面做了大量研究工作, 利用极限分析法, 绕过土体发生破坏时的弹塑性变形阶段, 将土体理想化为刚塑性体, 从能量原理出发, 在岩土结构物中构造线性速度场, 使屈服条件、流动法则在速度场中得到满足, 速度边界上满足边界条件, 通过研究土体发生无限制塑性流动时的外部功率与内能消散率求解荷载极限

值,从而简化了极限承载力的求解过程,为求解地基极限承载力提供了新的途径。本文在其研究的基础上首次考虑了单元土体所受的侧向土压力对地基极限承载力的影响,同时也综合考虑了土体自重、地面超载及基础埋深对地基承载力的影响,推导出理论上更为合理的三维圆形浅基础地基极限承载力上限解计算公式。

2 机动许可速度场的建立

虚功原理表明^[6,13],对于任意一组静力容许的应力场和任意一组机动容许的速度场,外力的虚功率等于物体内能消散功率。上限定理指出,在所有的机动容许的塑性变形速度场相对应的荷载中,极限荷载为最小。

根据极限分析上限定理与土体极限平衡理论,对直径为 B ,埋深为 H 的浅基础,建立机动许可速度场如图 1 所示,并假定:①圆形基础为刚性体,且底面与地基光滑接触,接触面为最大主应力面;②地基为理想刚塑性体,满足相关流动法则,服从摩尔-库仑破坏准则,且不可压缩;③地基破坏区分为三部分:在轴对称课题所选用的机动场中,刚性体 ABC 为主动破坏区、 ADC 过渡变形区、刚性体 ADE 被动破坏区。取单元计算模式如图 2 所示。

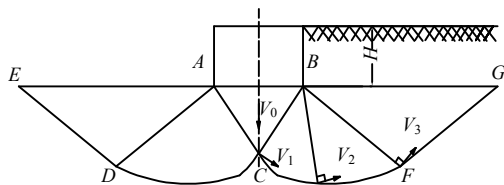


图 1 轴对称机动速度场

Fig.1 Axisymmetric motor velocity field

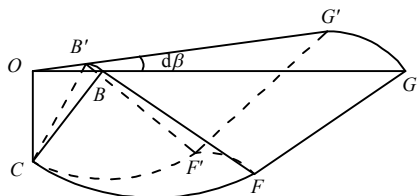


图 2 单元计算模式

Fig.2 Unit calculation mode

3 上限分析与能量消散率计算

内能耗散率包括速度间断面上的能量耗散率、变形区能量耗散率、重力作用下的能量耗散率及抵消外荷载的能量消耗散率,外功率为极限荷载作用下的虚功率^[10,12,14]。主动区 ABC 速度间断面上的速

度分布如图 1 所示。由图所示速度分布图可以推导出 AC 、 CF 及 FG 速度间断面上的速度:

(1) AC 间断面

$$V_1 = \frac{1}{2} V_0 \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (1)$$

式中: V_0 为基础向下运动速度; φ 为地基土内摩擦角。

(2) CF 间断面

$$V_2 = \frac{1}{2} V_0 \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \exp(\theta \tan \varphi) \quad (2)$$

式中: θ 为 CF 与 BC 之间的夹角。

(3) FG 间断面

$$V_3 = \frac{V_0}{2} \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \exp\left(\frac{\pi}{2} \tan \varphi\right) \quad (3)$$

3.1 三角形 ABC 区

(1) 如图 2 所示,以 BC 为母线的部分圆锥面间断面 CBB' 上的能量消散率为

$$w_{CBB'} = \int_{\Sigma_1} C [\Delta V_{t1}] ds \quad (4)$$

式中: $[\Delta V_{t1}]$ 为速度间断面 CBB' 两侧相对速度在切线方向上的分量,即为 $V_1 \cos \varphi$; Σ_1 为以 BC 为母线的部分圆锥面 CBB' ,则 $w_{CBB'} = c V_1 \cos \varphi \int_{\Sigma_1} ds$, c 为地基土黏聚力,即

$$w_{CBB'} = \frac{1}{16} c V_0 \sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \cos \varphi B^2 d\beta \quad (5)$$

式中: B 为基础宽度; $d\beta$ 为微扇形单元夹角。

(2) 圆锥楔体 $C-OBB'$ 所受重力做外功率为

$$W_{G1} = \gamma V V_0 = \frac{\gamma}{3} \frac{dB}{2\pi} \frac{\pi B^2}{4} \frac{B V_0}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \quad (6)$$

$$\frac{1}{48} \gamma B^3 V_0 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) d\beta$$

(3) 主动区圆锥楔体 $C-OBB'$ 所受土压力的径向分量与速度方向垂直,故土压力做功功率为 0。

3.2 对数螺线变形区 BCF

(1) 旋转间断面 CFF' 上能量消散率为

$$w_{CFF'} = \int_{\Sigma_2} c [\Delta V_{t2}] ds \quad (7)$$

式中: $[\Delta V_{t2}]$ 为速度间断面 CF 两侧相对速度在切线方向上的分量,即为 $V_2 = V_1 \exp(\theta \tan \varphi) \cos \varphi$; Σ_2 为 CF 螺旋线绕轴旋转的部分旋转曲面 CFF' ,如图 3 所示。

其中:

$$H = R_0 e^{\theta \tan \varphi} \sin \left(\theta + \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right); K_a = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (17)$$

式中: K_a 主动土压力系数。侧向土压力做功功率为

$$W_{Nr} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \times \frac{K_a \gamma R_0^3 e^{3\theta \tan \varphi}}{3 \cos \varphi} \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \theta \right) d\theta \cdot \sin \frac{d\beta}{2} \cdot \frac{1}{2} v_0 \sec \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\theta \tan \varphi} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \theta \right) \quad (18)$$

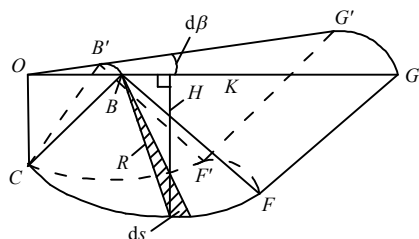


图 5 土压力计算模式图

Fig.5 Soil pressure calculation model

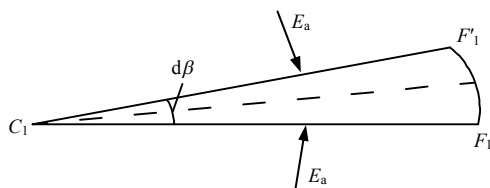


图 6 变形区土压力俯视图

Fig.6 Soil pressure vertical view of deformation zone

积分化简得

$$W_{Nr2} = \frac{K_a \gamma B^3 V_0 d\beta}{48 \cos \varphi \cos^4 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} f_3 \quad (19)$$

$$f_3 = \frac{\left[4 \tan \varphi \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] e^{2\pi \tan \varphi}}{16 \tan^2 \varphi + 1} - \frac{4 \tan \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{16 \tan^2 \varphi + 1} + \frac{2 \tan \varphi \cos \left(\frac{3\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}{16 \tan^2 \varphi + 9} + \frac{\left[2 \tan \varphi \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\varphi}{2} \right) - \frac{3}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\varphi}{2} \right) \right] e^{2\pi \tan \varphi}}{16 \tan^2 \varphi + 9} + \frac{2 \tan \varphi \cos \left(\frac{3\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}{16 \tan^2 \varphi + 9} \quad (20)$$

3.3 三角形 BFG 区

如图 7 所示, 以速度间断面 FG 为母线的部分旋转面上的能量消散率为

$$w_{FGG'F} = \frac{CV_0 B^2 d\beta}{4 \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} f_4 \quad (21)$$

$$f_4 = \frac{2 \exp \left(\frac{3\pi}{2} \tan \varphi \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + \exp(\pi \tan \varphi)}{\cos \varphi} - \frac{\exp \left(\frac{3\pi}{2} \tan \varphi \right)}{2(1 - \sin \varphi)} \quad (22)$$

被动区土体所受重力做外功功率如图 7 所示, 被动区旋转土体体积为

$$V_{BFG-B'F'G'} = \frac{\pi}{3} BF \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left[O'F^2 + O'FOG + OG^2 \right] \frac{d\beta}{2\pi} - \frac{\pi}{3} BF \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left[OB^2 + O'FOB + O'F^2 \right] \frac{d\beta}{2\pi} \quad (23)$$

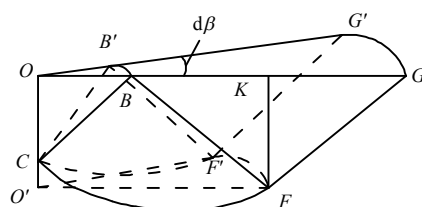


图 7 被动区旋转体示意图

Fig.7 Sketch of rotary body of passive zone

代入数据化简得

$$V_{BFG-B'F'G'} = \frac{B^3 d\beta}{4 \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \exp(\pi \tan \varphi) \cdot \left[\frac{\exp \left(\frac{\pi}{2} \tan \varphi \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} + 1 \right] \quad (24)$$

故被动区土体所受重力做外功功率为

$$W_{G3} = \frac{\gamma V_0 B^3 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) d\beta}{8 \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} f_5 \quad (25)$$

$$f_5 = \frac{\exp(2\pi \tan \varphi)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} + \exp\left(\frac{3\pi}{2} \tan \varphi\right) \quad (26)$$

被动区土体所受侧向土压力做功功率如图 8、9 所示，宽度为 dx 的单元土体所受主动土压力为

$$dE_a = \frac{1}{2} K_a \gamma h^2 dx \quad (27)$$

$$h = x \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (28)$$

$$L = BG = \frac{B \exp\left(\frac{\pi}{2} \tan \varphi\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (29)$$

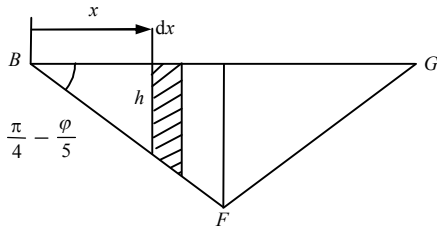


图 8 被动区土压力计算模式图

Fig.8 Schematic diagram of soil pressure calculation model of passive zone

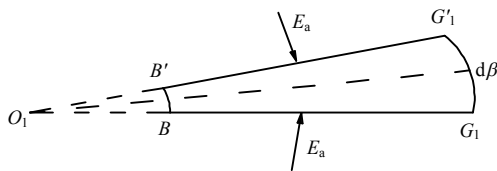


图 9 被动区土压力俯视图

Fig.9 Soil pressure vertical view of passive zone

则被动区土体所受土压力为

$$E_a = 2 \int_0^{L/2} \frac{\gamma K_a}{2} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) x^2 dx = \frac{\gamma B^3 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{24} \exp\left(\frac{3\pi}{2} \tan \varphi\right) \quad (30)$$

故被动区土体所受侧向土压力做功功率为

$$W_{Nr3} = 2E_a \sin \frac{d\beta}{2} V_3 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\gamma B^3 V_0}{48} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \exp(2\pi \tan \varphi) d\beta \quad (31)$$

3.4 圆环段上的能量消散率

圆环段上的能量消散率为

$$w_q = \frac{1}{2} q_T \left(\pi L_0^2 - \frac{1}{4} \pi B^2 \right) \frac{d\beta}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) V_3 \quad (32)$$

式中： $q_T = \gamma H$ ， $L_0 = L + B/2$ ， γ 为基础底面以上的平均密度。化简得

$$w_q = \frac{\gamma H V_0 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{2} f_6 \quad (33)$$

$$f_6 = \frac{e^{\frac{3\pi}{2} \tan \varphi}}{\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} + \frac{e^{\pi \tan \varphi}}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (34)$$

4 地基承载力的上限解

AD 两侧速度连续，它不是速度间断线，在 AD 线上没有能量消散。外力的总功率为 $\frac{P V_0 d\beta}{2\pi}$ 。由上限定理知，外力的总功率等于内能消散率，则圆形浅基础地基承载力的上限解为

$$\begin{aligned} \frac{P^+}{\pi B^2} = & \frac{C \cos \varphi}{8 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} - \frac{1}{24} \gamma B \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \\ & \frac{C \sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{2 \sin \varphi \tan \varphi} f_0 - \frac{\gamma B \sec^5\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{8 \sin \varphi} f_1 - \\ & \frac{\gamma B \sec^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{4 \sin 2\varphi \cos \varphi} f_2 - \frac{\gamma B}{6 \cos^3 \varphi} f_3 + \\ & \frac{C}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) f_4 - \frac{\gamma B \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{4 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} f_5 - \\ & \frac{\gamma B}{24} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) e^{2\pi \tan \varphi} + \frac{\gamma H \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{2} f_6 \end{aligned} \quad (35)$$

5 工程实例与计算结果对比

本文采用文献[10]中的工程实例，用 Matlab 编制相应计算程序，将本文式 (35) 所计算的上限解与实测值及文献[10]中的上限解作了对比，如表 1 所示。从表可知：①本文上限解均比实测值要小，误差基本上均控制在 17% 以内，最大误差为 19.4%，

最小误差为 8.4%。②本文上限解均比文献[10]中的上限解要小, 最大误差为 16.75%, 最小误差为

3.05%, 说明本文上限解是一个更接近极限承载力真实值的上限解。

表 1 本文极限承载力与其他两种方法确定的极限承载力误差对比分析
Table 1 Error analysis of this paper's ultimate bearing capacity compared with the other two ultimate bearing capacity by using different methods

序号	土名	埋深 / m	γ / (kN/m ³)	c / kPa	内摩擦角 / (°)	实测值 / kPa	本文上限解 / kPa	误差 1 分析 / %	文献[10]上限解 / kPa	误差 2 分析 / %
1	黏土	3.0	19.5	22.0	22.0	950	849.9	10.53	1 020.9	16.75
2	黏土	2.6	16.2	28.4	15.2	450	377.5	16.08	391.8	3.65
3	粉土	2.0	18.1	23.0	14.5	350	320.6	8.40	376.7	14.80
4	粉土	2.0	20.6	25.0	18.3	750	607.2	19.40	626.3	3.05
5	粉土	1.6	20.8	9.8	24.8	850	731.5	13.90	769.3	4.91
6	粉土	2.2	20.4	5.1	32.4	2 500	2 091.4	16.30	2 218.9	5.75
7	粉土	2.5	22.4	5.3	36.2	4 500	4 144.0	7.91	4 812.3	13.90
8	粉土	1.8	21.2	7.7	26.4	1 000	901.7	9.84	949.5	5.03

注: 误差 1 和误差 2 分别为本文上限解与实测值、本文上限解与文献[10]上限解的误差。

6 结 论

(1) 从表 1 计算结果对比可知: 与文献[10]相比, 本文在考虑侧向土压力及土体自重后, 计算的上限解均比文献[10]中的上限解要小。而由本文选择的地基破坏模式及机动位移速度场分析可知: 主动区土体在上部荷载作用下垂直向下滑动, 重力做正功使上限解偏低; 过渡区及被动区土体沿速度间断破坏面向上滑动, 重力做负功使上限解偏高, 但考虑土体重度时, 总体上会使地基极限承载力上限解偏高。此外, 地面超载做负功使上限解偏高。故若不考虑侧向土压力的作用, 上限解明显会增大, 但本文计算结果证明: 考虑侧向土压力的作用使上限解减小, 且对上限解有较大影响。

(2) 考虑侧向土压力使得地基极限承载力上限解偏低, 更进一步接近极限承载力的真实解, 证明侧向土压力对地基极限承载力上限有较大影响, 在工程设计中应予以重视。

(3) 本文根据极限分析的上限定理, 选择合适的地基破坏模式及机动速度场, 推导出的地基极限承载力上限解较文献[10]上限解要小, 更为合理地反映了圆形浅基础地基极限承载力, 可为浅基础设计提供参考。

参 考 文 献

- ZHAO L, WANG J H. Vertical bearing capacity for ring footings[J]. *Computers and Geotechnics*, 2008, 35: 292—304.
- YANG Hong-jie, SHEN Zhu-jiang, WANG Jian-hua. 3D lower bound bearing capacity of smooth rectangular surface footings[J]. *Mechanics Research and Communications*, 2003, 30: 481—492.
- TERZAGHI K, PECK R B. Soil mechanics in engineering Practice[M]. New York: Wiley John, 1948.
- MEYERHOF G G. The ultimate bearing capacity of foundations[J]. *Geotechnique*, 1951, 2(4): 301—332.
- SARMA S K, IOSSFELIS I S. Seismic bearing capacity factors of shallow strip footings[J]. *Geotechnique*, 1990, 40(2): 265—273.
- 张学言. 岩土塑性力学基础[M]. 北京: 人民交通出版社, 1993.
- SOKOLOVSKII V V. Statics of granular media[M]. London: Pergamon Press, 1965.
- HANSEN J B. A revised and extended formula for bearing capacity[J]. *Bulletin of the Danish Geotechnical Institute*, 1970, 28: 5—11.
- GRIFFITHS D V. Computation of bearing capacity factors using finite elements[J]. *Geotechnique*, 1982, 32(3): 195—202.
- 李亮, 杨小礼. 圆形浅基础地基承载力极限分析的上限解析解[J]. 铁道学报, 2001, 23(1): 94—97.
- LI Liang, YANG Xiao-li. Analytical solution of bearing capacity of circular shallow foundations using upper bound theorem of limit analysis[J]. *Journal of The China Railway Society*, 2001, 23(1): 94—97.
- 陈惠发. 极限分析与土体塑性[M]. 北京: 人民交通出版社, 1975.
- 栾茂田, 张其一, 杨庆, 等. 均质地基上浅埋矩形基础极限承载力上限分析[J]. 海洋工程, 2008, 26(2): 69—77.
- LUAN Mao-tian, ZHANG Qi-yi, YANG Qing, et al. Upper bound limit analysis of bearing capacity of rectangular shallow footing on homogeneous clays[J]. *The Ocean Engineering*, 2008, 26(2): 69—77.
- SOUBRA A H. Upper-bound solutions for bearing capacity of foundations[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering ASCE*, 1999, 28(2): 59—68.
- 龚晓南. 土工计算机分析[M]. 北京: 中国建筑出版社, 2000.